

CUATRO HECHOS ESTILIZADOS DE LAS SERIES DE RENDIMIENTOS: UNA ILUSTRACIÓN PARA COLOMBIA¹

JULIO CÉSAR ALONSO

Economista, Universidad del Valle.
Maestría en Economía, Iowa State University.
Ph.D., Iowa University.
Profesor Departamento de Economía Universidad Icesi.
jcalonso@icesi.edu.co

MAURICIO ALEJANDRO ARCOS

Profesional en Economía y Negocios Internacionales, Universidad Icesi.
Investigador Asistente, Universidad Icesi.
marcos@icesi.edu.co

Fecha de recepción: Febrero 22 de 2006

Fecha de aceptación: Agosto 14 de 2006

ABSTRACT

Using data for the peso-dollar exchange rate and the Colombian stock exchange index we illustrate four well-known stylized facts of the financial time series. These facts are: i) prices follow a random walk process, ii) returns exhibit a leptokurtic distribution with fat tails, iii) as the time scale over which returns are calculated is increased, their distribution tends to “look like” a normal one (Aggregational Gaussianity), and iv) returns presents volatility clustering.

KEY WORDS

Asset Returns, Stylized Facts, Exchange Rate, IGBC, Volatility Clustering, Fat Tails.

Classification: JEL: F310, C220, G000

RESUMEN

En este documento empleamos las series de la Tasa de Cambio Representativa de Mercado y el Índice General de la Bolsa Colombia para ilustrar cuatro hechos estilizados muy conocidos en la literatura financiera: i) las

1. Los autores agradecen la financiación de este proyecto al Fondo de Investigaciones de la Universidad Icesi. Naturalmente, la responsabilidad de las ideas expresadas en este documento comprometen únicamente a los autores.

series de precios siguen un camino aleatorio, ii) la distribución de los rendimientos es leptocúrtica y exhibe colas pesadas, iii) a medida que se calculan los rendimientos para períodos más amplios su distribución se acerca más a la distribución normal, y iv) los rendimientos presentan volatilidad agrupada (volatility clustering).

PALABRAS CLAVE

Rendimientos financieros, Regularidades empíricas, Tasa de cambio, índice general de la Bolsa Colombia, volatility clustering, fat tails.

Clasificación: JEL: F310, C220, G000

Clasificación Colciencias: B

INTRODUCCIÓN

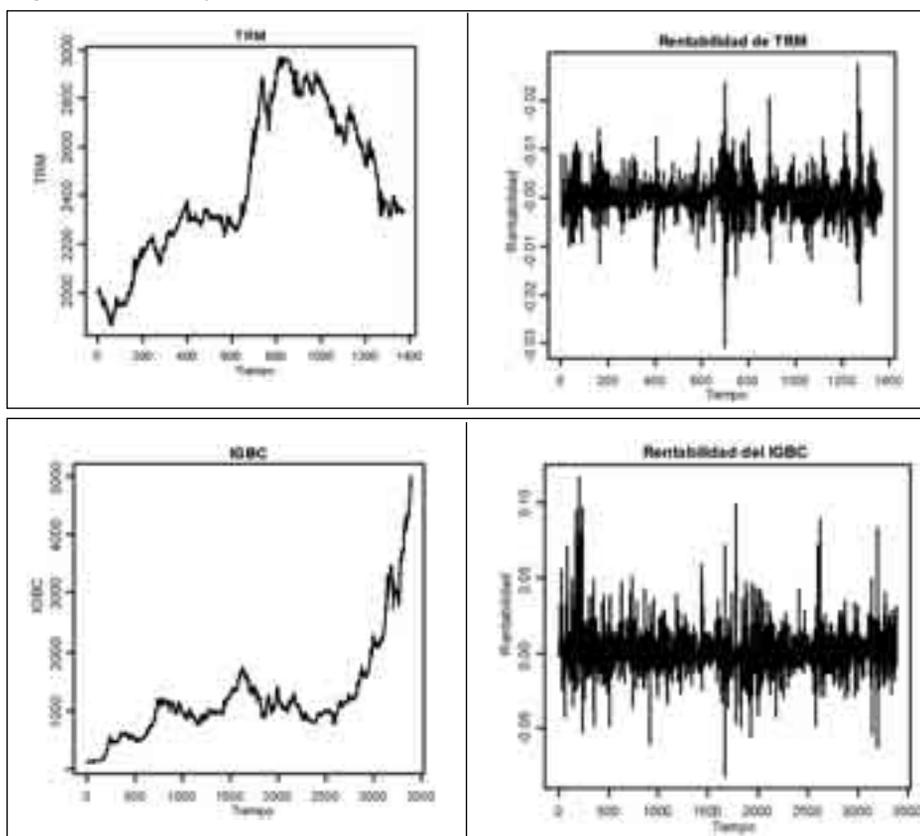
Las series de rendimientos de activos (o portafolios) financieros poseen unas regularidades empíricas asombrosas que, en la mayoría de los casos, se encuentran presentes sin importar el mercado en que sean transados o el tipo de activo. Estas regularidades empíricas se conocen en la literatura especializada como hechos estilizados y han sido documentadas por diferentes autores (Ver, por ejemplo, a Cont (2001) y Vries (1994)).

Este documento busca repasar algunos de esos hechos estilizados e ilustrarlos con los rendimientos de la tasa de cambio representativa del

mercado (TRM) y de un portafolio representativo de las acciones transadas en la Bolsa de Colombia (la cesta representativa resumida en el Índice General de la Bolsa Colombia (IGBC)).

En la Figura 1 se pueden observar tanto la serie de la TRM en Colombia para el período comprendido entre el 25 de septiembre de 1999 y el 31 de abril de 2005 (Tomada de la base de datos del Banco de la República), y el IGBC para el período 21 de enero de 1991 a 21 de febrero de 2005 (tomado de la base de datos de Economática), así como sus rendimientos (sólo se incluyen los días laborales del período).

Figura 1. Series y retornos.



Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar, el comportamiento de los rendimientos (diferencia en los logaritmos) de ambas series presenta similitudes asombrosas. En el resto del documento nos centraremos en esas características, tanto de los rendimientos como de las series originales, que denominamos hechos estilizados. Antes de continuar, es importante aclarar que este documento no tiene como intención demostrar o brindar explicación del origen de estos hechos estilizados, pero sí pretende brindar evidencia sobre la presencia de ellos en las series seleccionadas, labor no documentada anteriormente para el caso de las series de retornos colombianas.

HECHO ESTILIZADO 1: CAMINO ALEATORIO

En la Figura 1 se observa el comportamiento errático de la TRM y del IGBC y, difícilmente, a simple vista se puede determinar la dirección que tomará la serie en el siguiente período. Formalmente, si denotamos el precio de un activo (o el valor de un portafolio) por p_t , entonces el comportamiento de las realizaciones de p_t parecen ser tal que la mejor forma para predecir el precio del activo en el siguiente período es emplear el valor del período anterior.

En otras palabras, los precios (o sus logaritmos) parecen ser la realización de un proceso estocástico denominado *camino aleatorio* o *proceso de martingala*, según sea el caso. Este hecho implica que el comportamiento del precio del activo corresponde a la siguiente ley de movimiento:

$$p_t = p_{t-1} + \eta_t \quad (1)$$

donde η_t es un proceso estocástico

con $\mu \neq 0$. Si η_t proviene de una sola distribución, entonces el proceso (1) se denomina un camino aleatorio, si por el contrario η_t proviene de diferentes distribuciones, entonces (1) se denomina un proceso de martingala. En términos más formales, esto implica que el proceso generador de los datos de los precios son integrados de orden uno (I(1)) o también conocidos como procesos con una raíz unitaria.

Este hecho estilizado implica: i) ausencia de correlación en los retornos, ii) la no existencia de predictibilidad del desempeño de los precios y iii) formación eficiente de los precios.

En el caso de las dos series de estudio, intuitivamente esta característica puede ser observada en la Figura 1. Sin embargo, para estar seguros de esta propiedad de las series se pueden efectuar pruebas estadísticas de estacionariedad (o conocidas como pruebas de raíces unitarias en la literatura econométrica de series de tiempo) que soporten dicha observación. Los resultados de cuatro pruebas diferentes de raíces unitarias aplicadas a cada una de las series se presentan en el Anexo 1, estos resultados brindan evidencia para determinar que las dos series son I(1), es decir, cumplen el primer hecho estilizado.

HECHO ESTILIZADO 2: COLAS PESADAS DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS RETORNOS

La distribución (no condicional) de los rendimientos financieros concentró gran parte de la investigación del campo de la econometría financiera en los años setenta. Esta distribución acumulada (no condicional) se define

como:

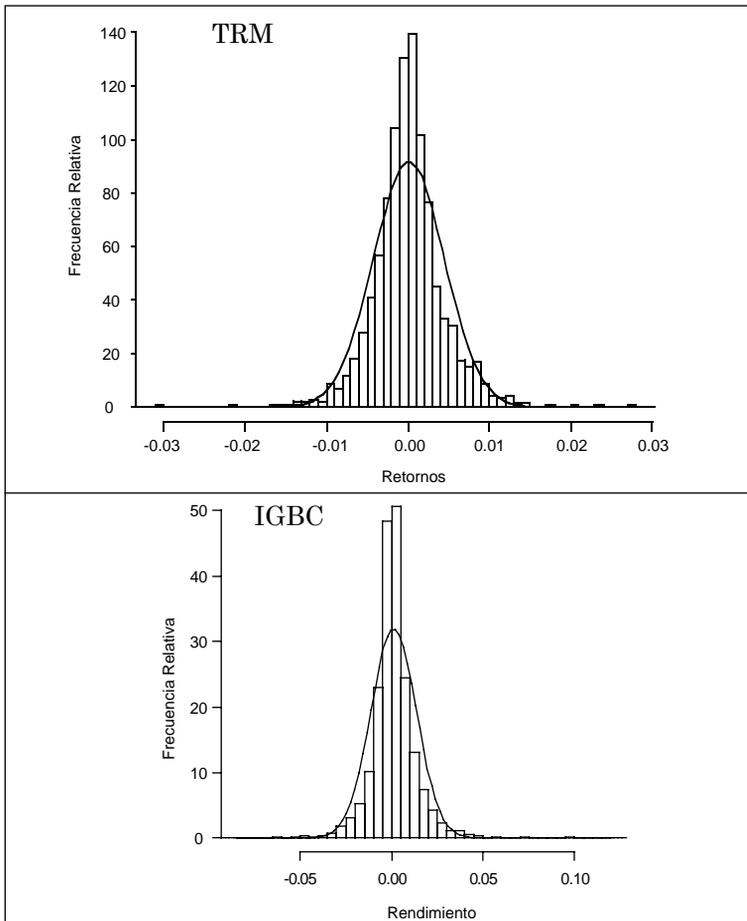
$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(r_t) dr_t \quad (2)$$

Donde r_t corresponde al rendimiento continuo del activo para el período t ($r_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1})$). En especial, la función de densidad o pdf (la derivada de la función de distribución), $f(x) = F'(x)$, de los rendimientos tiene características similares a la normal como la simetría y la forma “acampanada”.

Pero existe una gran diferencia entre las distribuciones empíricas de

los rendimientos (representada por los histogramas) y la distribución normal; la distribución de los rendimientos tiende a ser más “picuda” o leptocúrtica que la distribución normal y posee colas más pesadas. En la práctica las colas pesadas (“fat tails”) implican que existe mayor probabilidad de obtener valores extremos (observaciones alejadas muy alejadas de la media) que la que existiría en una distribución normal.

Figura 2. Histogramas de los rendimientos de las series.



Fuente: Elaboración propia.

Este hecho se puede observar en la Figura 2, en la cual se le ha sobrepuesto al histograma la correspondiente distribución normal. Estos resultados

gráficos se pueden corroborar con las estadísticas descriptivas de cada una de las muestras que se reportan en la Tabla 1.

Tabla 1. Resumen estadístico de las muestras.

	Retornos TRM	Retornos IGBC
Media	0.000113942	0.001118451
Varianza	1.88828E-05	0.000156233
Coficiente de Asimetría	0.1070825	0.9958895
Curtosis	4.982253	10.26843
Jarque-Bera	1426.238***	15467.95***

*** Se puede rechazar la hipótesis nula de Normalidad con un 99% de confianza.

Fuente: Elaboración propia.

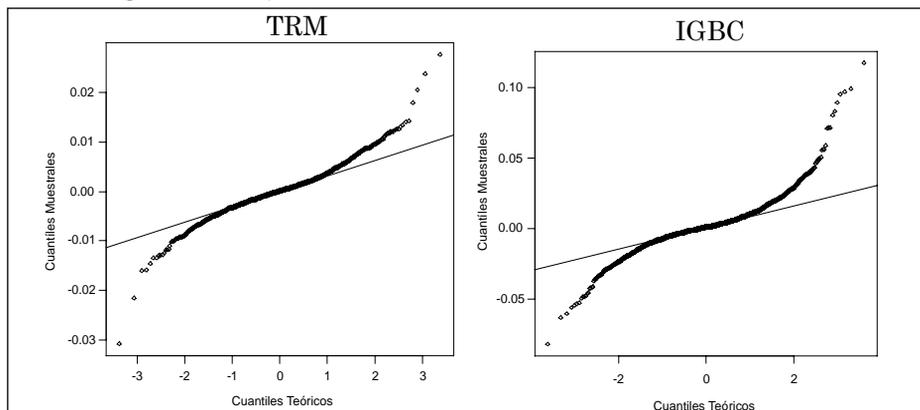
Como era de esperarse, las estadísticas descriptivas también refuerzan la evidencia a favor de la no-normalidad de la rentabilidad diaria. En ambos casos es claro que las distribuciones muestrales son leptocúrticas (dada la curtosis superior a 3). También existe alguna evidencia de asimetría, aunque como lo puntualizan Guermant y Harris (2002), en presencia de exceso de curtosis dicha asimetría es difícil de interpretar.

La no-normalidad de la distribución de los rendimientos también se puede observar gráficamente mediante el

diagrama de probabilidad normal (normal probability plot o QQ plot). Este gráfico representa la relación entre los cuantiles muestrales y los teóricos de una distribución normal, si la muestra proviene de una distribución normal entonces los puntos muestrales deberían estar sobre una línea recta.

En la Figura 3 se puede observar claramente cómo las colas de la distribución son más pesadas (“fat tails”) que la distribución normal. En otras palabras, la probabilidad de obtener valores extremos es mucho mayor

Figura 3. QQ-plots de los rendimientos de las series.



Fuente: Elaboración propia.

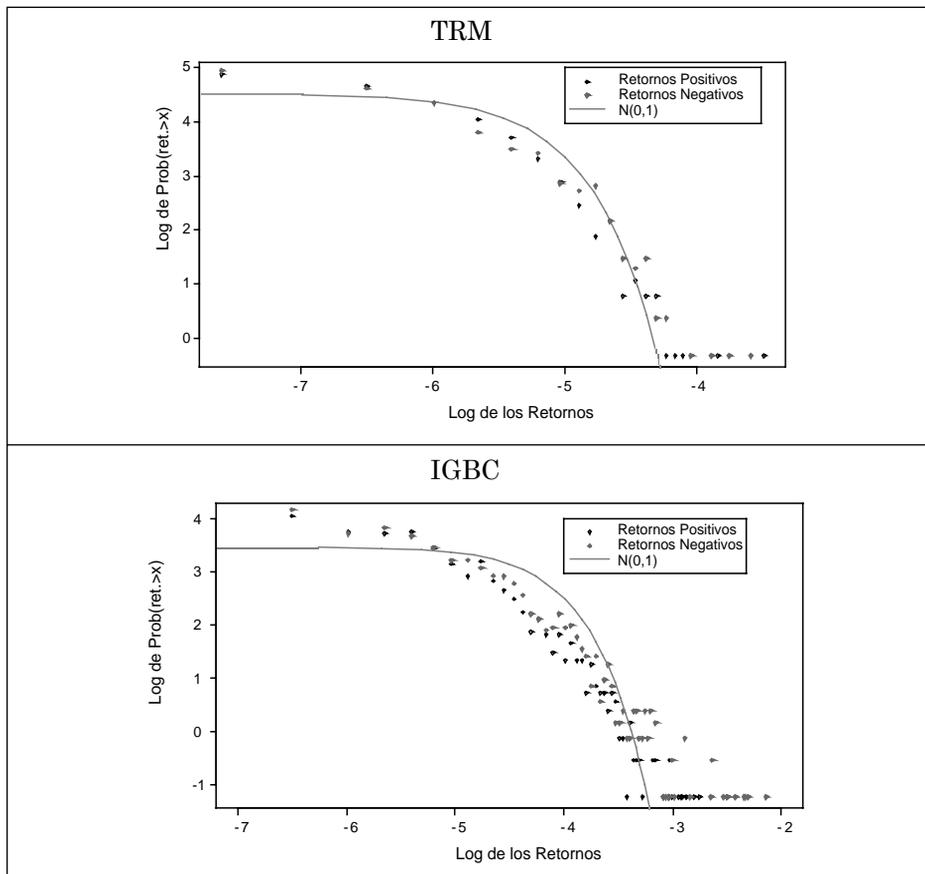
en la distribución empírica de los rendimientos que lo que predice una distribución normal.

Una manera más adecuada de apreciar claramente la presencia de colas pesadas es por medio de la representación logarítmica de los histogramas. En esta representación, al emplearse una escala logarítmica se observa con mayor detenimiento el comportamiento de las colas de la distribución muestral frente al de una distribución normal.

En la Figura 4 podemos ver cómo la probabilidad de los valores ex-

tremos de las muestras es mucho mayor que lo esperado en la normal. Así, estas dos series son un buen ejemplo del hecho estilizado de que los rendimientos son leptocúrticos y presentan colas pesadas. Este hecho ha obligado a que se adopten aproximaciones como la teoría de los valores extremos al momento de estudiar los rendimientos de los activos, en especial porque los valores extremos son los más importantes para los actores de los mercados financieros y reguladores.

Figura 4. Representación logarítmica de los histogramas de rendimientos.



Fuente: Elaboración propia.

**HECHO ESTILIZADO 3:
NORMALIDAD AGREGADA
(AGGREGATIONAL
GAUSSIANITY)**

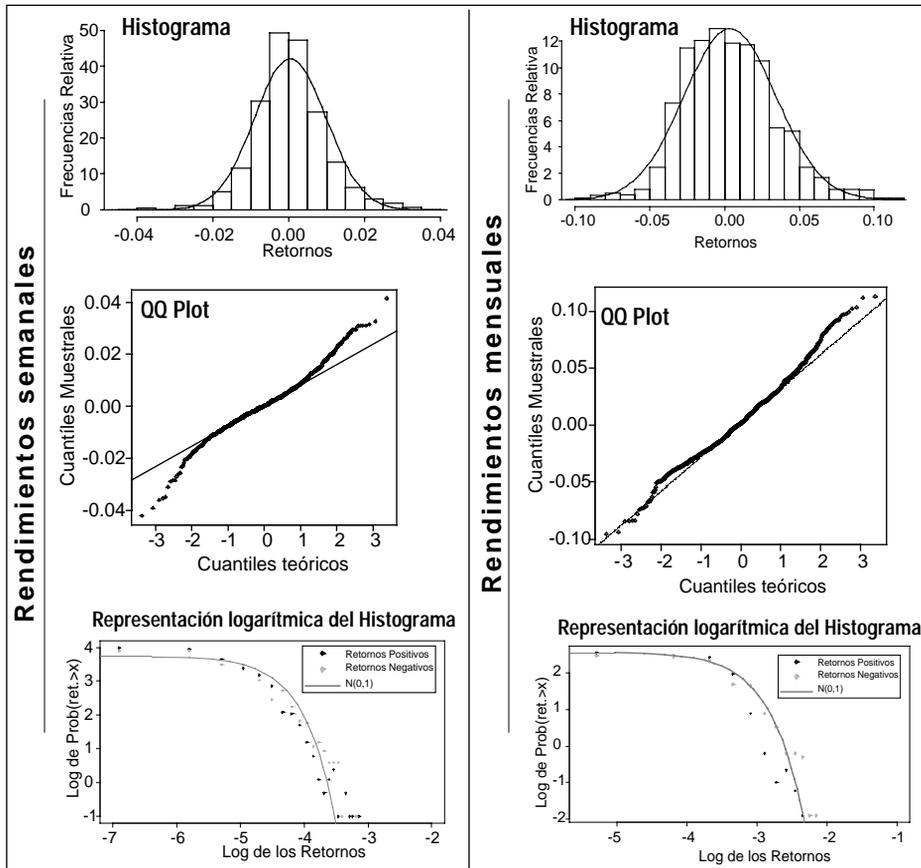
Una característica interesante que presentan las series de retornos de los activos es que si bien su distribución no es normal, como se discutió anteriormente; a medida que los rendimientos se calculan para períodos más grandes, la distribución de ellos tiende a parecerse más a una distribución normal (si bien no necesariamente seguirán una distribución normal). En otras palabras, la forma de la distribución de los rendimien-

tos no es la misma para diferentes escalas de tiempo. Este fenómeno se conoce con el nombre de normalidad agregada.

Así, este hecho implica que si se compara la distribución de los rendimientos diarios con los de los rendimientos mensuales, trimestrales, semestrales y anuales, se concluye que estos últimos tienen un comportamiento más cercano al de una distribución normal.

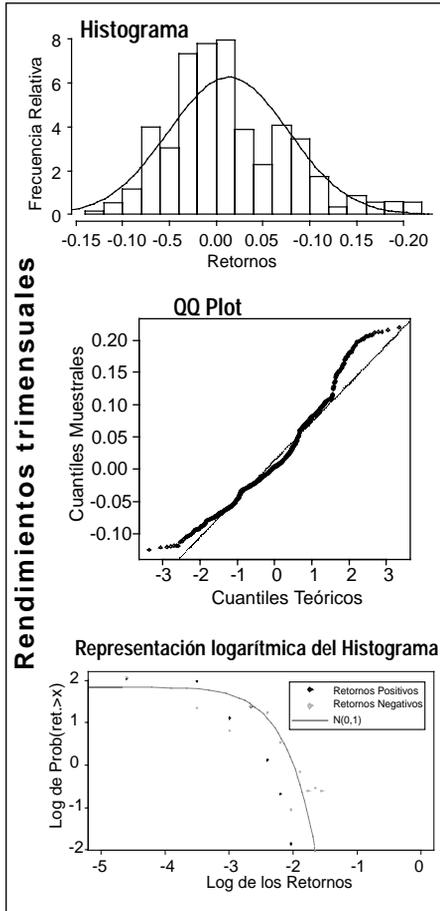
Como se puede observar en la Figura 5, las características de la distribución de los rendimientos tienden a ser

Figura 5. Rendimientos de la TRM para diferentes escalas de tiempo.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 5. Continuación



Fuente: Elaboración propia.

cada vez más similares a la distribución normal, a medida que la escala de tiempo se agranda; en especial las colas tienden a ser menos pesadas y la leptocurtosis menos pronunciada o desaparece. No obstante, el comportamiento de los rendimientos aún no es lo que se esperaría de una distribución normal (Ver Anexo 2 para observar las pruebas de normalidad

de Jarque-Bera, así como las demás estadísticas descriptivas. En ese mismo anexo se presenta la Figura 9 para la serie de rendimientos del IGBC.)

Así, este hecho estilizado implica la necesidad de estudiar por separado las características de los rendimientos de un mismo activo, lo que depende de la escala de tiempo. También es claro, que entre menor sea la periodicidad estudiada, más alejada estará la distribución de los rendimientos de la normalidad.

HECHO ESTILIZADO 4: VOLATILIDAD NO CONSTANTE Y AGRUPADA (VOLATILITY CLUSTERING)

Como se puede observar en la Figura 6, los rendimientos muestran una gran variabilidad (volatilidad). En otras palabras, la desviación que presentan los rendimientos respecto a su media es muy cambiante. Pero no sólo eso, la volatilidad busca "agruparse" o presentar clusters (volatility cluster), pues episodios de gran volatilidad tienden a estar seguidos de períodos de alta volatilidad y viceversa.

Este hecho estilizado puede ser observado para nuestras series de rendimientos empleando diferentes medidas de volatilidad. Por ejemplo, para determinar que la varianza no es constante podemos emplear la volatilidad histórica² para diferentes ventanas: 5 días (una semana), 10 días (dos semanas), 15 días (tres semanas) y 20 días (un mes).

2. El término volatilidad histórica se refiere a calcular la varianza para los últimos h datos (ventana) para cada una de las observaciones. Es decir, siempre se calculará la varianza con los últimos h datos, donde h es una constante.

Figura 6. Volatilidad histórica de los rendimientos de ambas series.

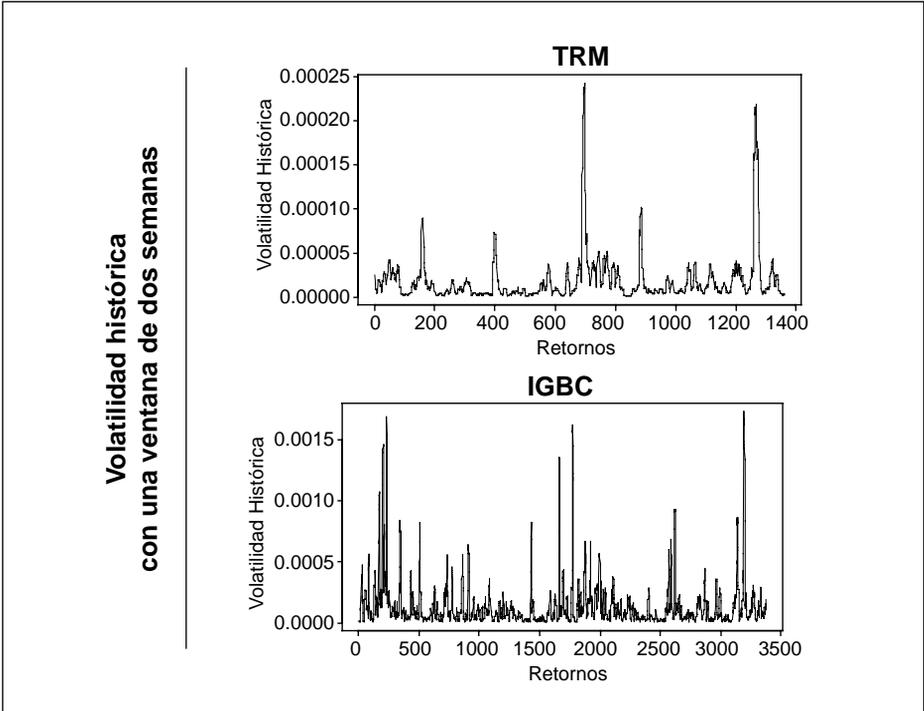
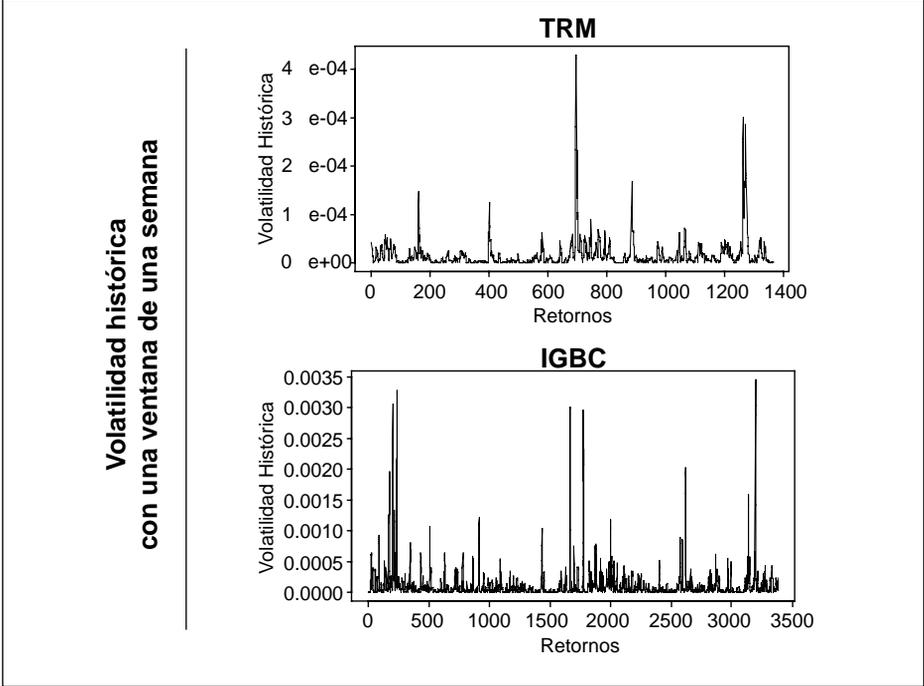
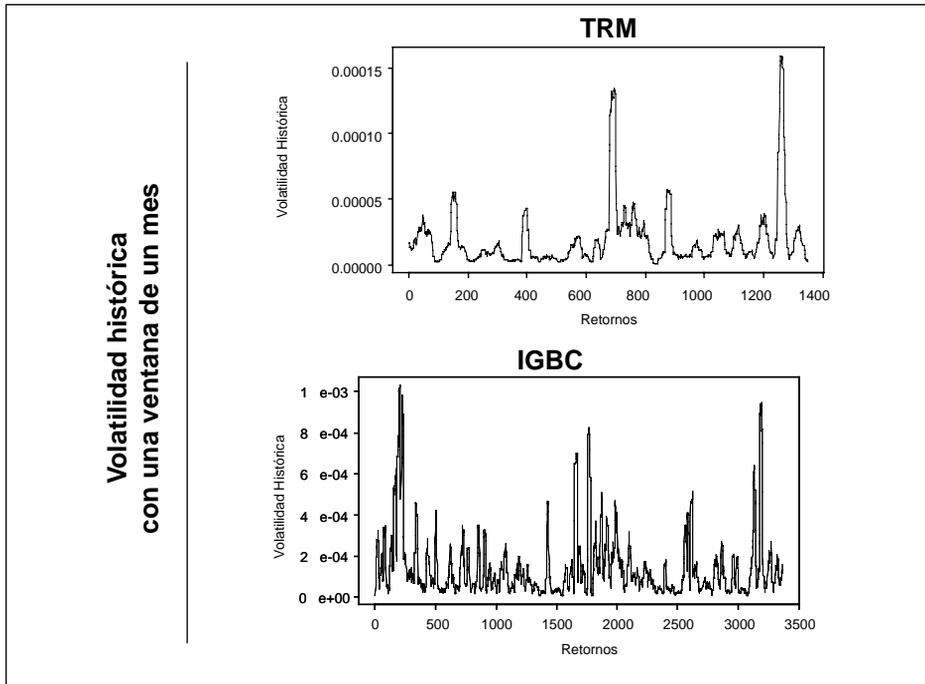
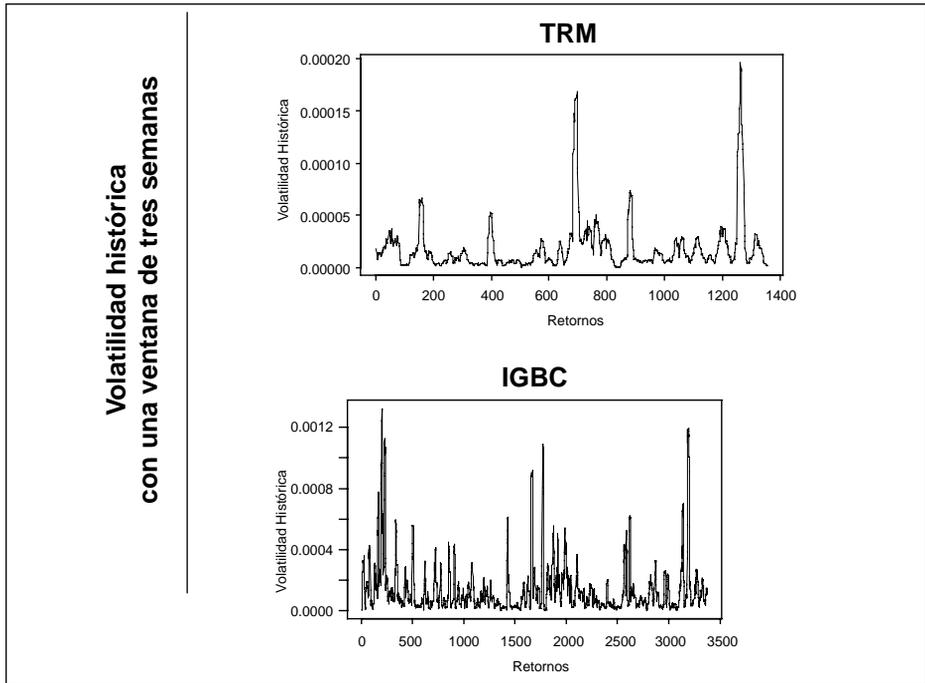


Figura 6. Continuación.

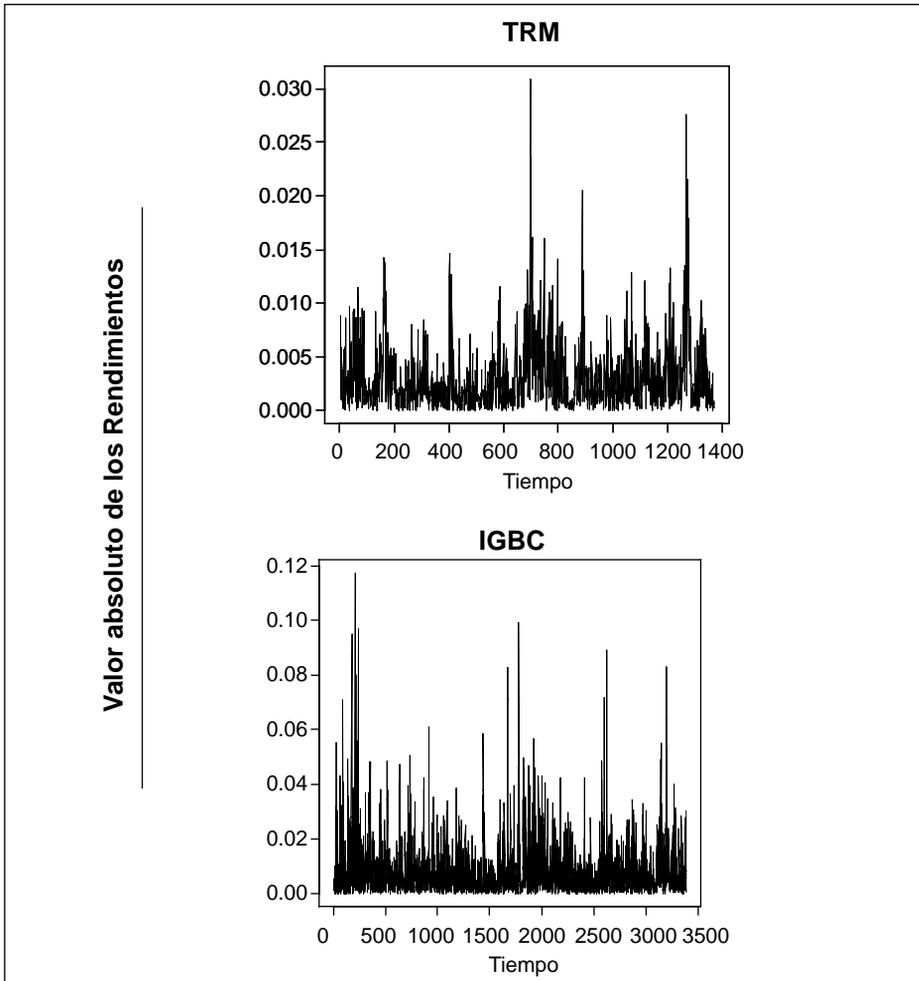


Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en la Figura 6, empleando diferentes ventanas, la volatilidad de las series de los rendimientos no es constante a través del período de estudio. Hay otras formas de medir la volatilidad (y demostrar que no es constante) como emplear el

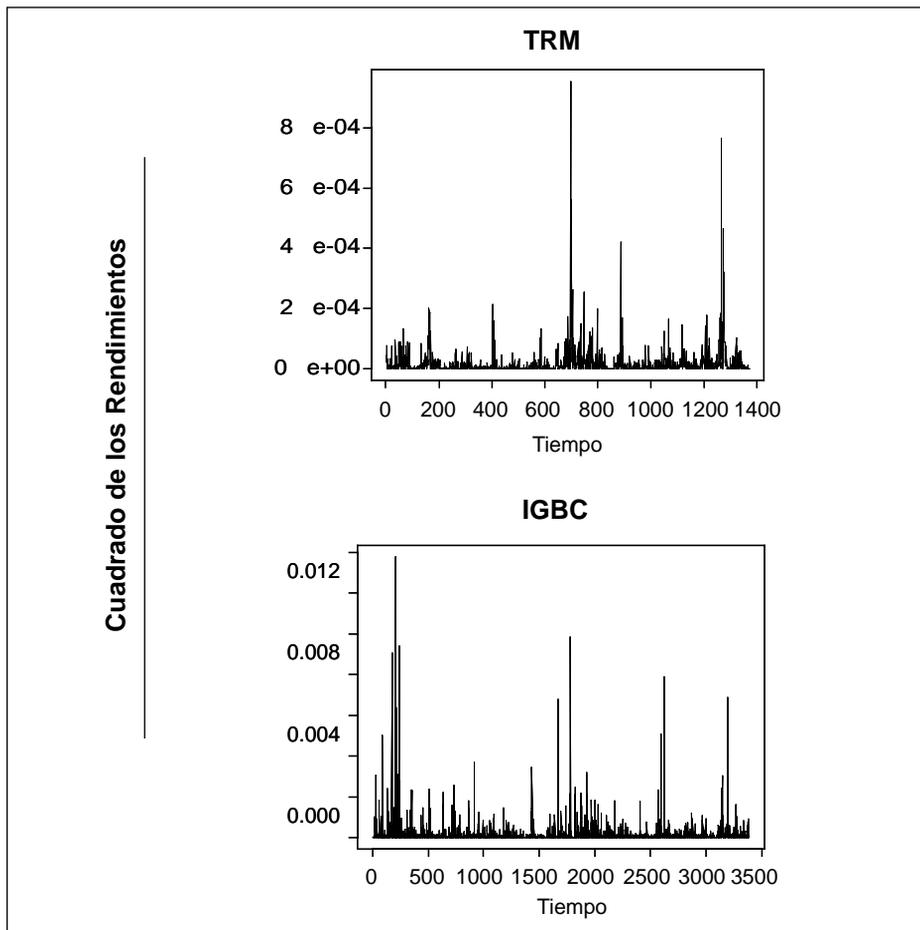
valor al cuadrado de los rendimientos o su valor absoluto.³ Cualquiera de estas medidas mostrará el mismo fenómeno: la volatilidad de los rendimientos no es constante (Ver Figura 7).

Figura 7. Otras medidas de la volatilidad de los rendimientos de ambas series.



3. Los rendimientos al cuadrado se emplean como medida de volatilidad dado que los rendimientos diarios comúnmente presentan un promedio estadísticamente igual a cero, entonces la expresión $(R_t - \mu)^2$ será equivalente al cuadrado de los rendimientos. Así, el cuadrado de los rendimientos muestra la desviación con respecto a la media. Igual razonamiento justifica la utilización del valor absoluto de los rendimientos como medida de la volatilidad.

Figura 7. Continuación.



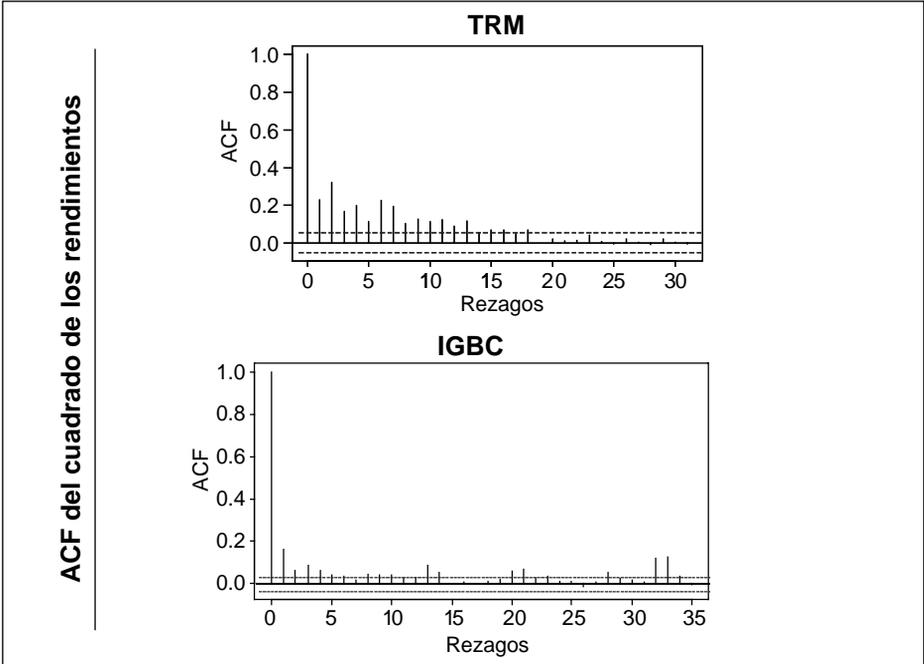
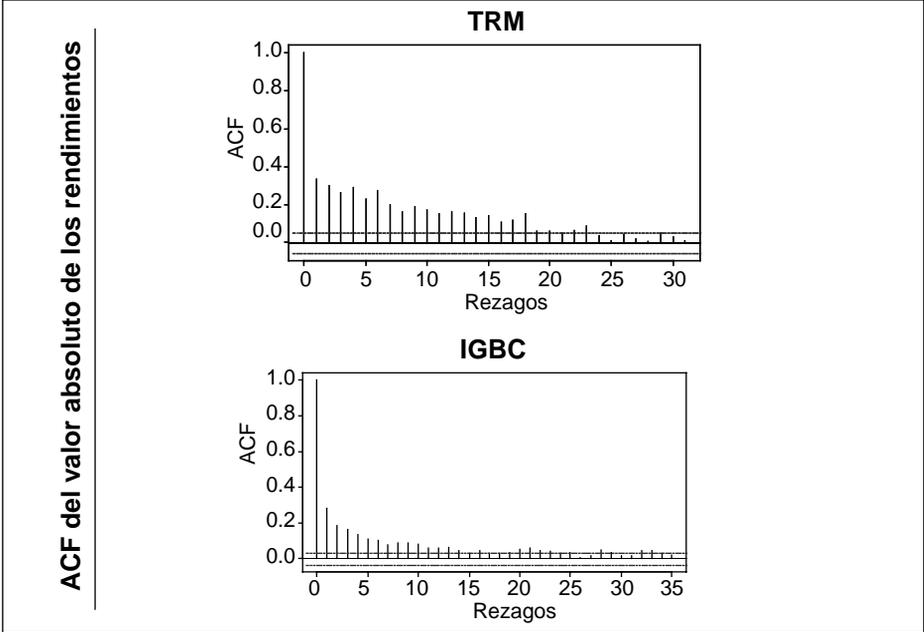
Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, también se ha observado que para las series de rendimientos financieros, con asombrosa regularidad, existe una fuerte relación entre la volatilidad en un período determinado y las volatilidades pasadas. La función de autocorrelación (ACF por su sigla en inglés) del valor absoluto de los rendimientos (o el cuadrado de ellas) es una manera sencilla de estudiar la relación lineal entre la volatilidad de diferentes períodos (Ver Figura 8).

La Figura 8 demuestra la presencia de correlación entre diferentes períodos de la volatilidad de los rendimientos. Es decir, la volatilidad de un período determinado está relacionada con los valores pasados de ésta; y dicha relación tiende a desaparecer a medida que se consideran mayores rezagos. En otras palabras, existe volatilidad agrupada (volatility clustering).

Este hecho implica que la volatilidad presenta un patrón de comportamiento que potencialmente podría ser mo-

Figura 8. Correlación de la volatilidad de los rendimientos de ambas series⁴



Fuente: Elaboración propia.

4. La línea punteada corresponde a un intervalo de un nivel de confianza del 99% dentro del cual la autocorrelación muestral no es significativamente diferente de cero.

delado estadísticamente, de tal forma que se puedan brindar pronósticos de la volatilidad.

Usualmente, los trabajos empíricos emplean modelos estadísticos como el de heteroscedasticidad condicional auto-regresiva generalizado, GARCH(p,q) por su nombre en inglés. Este modelo implica que:

$$R_t \mid \pi / \psi_t \quad (3)$$

Donde la varianza condicional del término de error $\psi_t (\phi_t^2)$ se supone que seguirá el siguiente patrón:

$$\phi_t^2 \mid \gamma_0 / \prod_{i=1}^q \delta_i \phi_{t-i}^2 / \prod_{i=1}^p \gamma_i \psi_{t-i}^2 / \eta_t, \eta \sim iid \quad (4)$$

con $p, q, \gamma_i, \delta_i \geq 0$ y $\gamma_0 > 0$.

En resumen, este hecho estilizado implica que variaciones grandes en los precios tienen mayor probabilidad de ser seguidas por variaciones grandes en el precio. Así, existe la necesidad de modelar la volatilidad de los rendimientos con métodos estadísticos que permitan capturar la variabilidad de la volatilidad al momento de considerar el riesgo asociado a las series de rendimientos.

COMENTARIOS FINALES

En este documento se ha ejemplificado con las series de la Tasa Cambio Representativa de Mercado y el Índice General de la Bolsa de Colombia cuatro hechos estilizados conocidos en la literatura financiera: i) las series de precios siguen un camino aleatorio, ii) la distribución de los rendimientos es leptocúrtica y exhibe colas pesadas, iii) a medida que se calculan los rendimientos para períodos más amplios su distribución se acerca más a la distribución normal, y iv) los rendimientos presentan volatilidad agrupada (volatility clustering).

Estos hechos estilizados asombrosamente se encuentran presentes en la mayoría de las series de rendimientos (y precios) sin importar qué tipo de modelo o supuestos paramétricos se efectúen. Así, estos hechos estilizados deben ser entendidos como una restricción para cualquier modelo empírico y teórico que se emplee para explicar el comportamiento de los precios de los activos o medir la volatilidad. De hecho, todo el desarrollo reciente en el cálculo del VaR (Valor en riesgo por su sigla en inglés) trata de incorporar estos hechos estilizados en las estimaciones (Ver Alonso y Arcos, 2005).

Anexo 1. Pruebas de estacionariedad para las series

Para determinar si una serie de tiempo corresponde a un proceso generador de los datos de un camino aleatorio (proceso con raíz unitaria o integrada de orden uno $I(1)$) se emplean convencionalmente pruebas de raíces unitarias como las de Dickey y Fueller (1979) en su versión aumentada (ADF), y la de Phillips y Perron (1988) (PP). Para ambas pruebas, la hipótesis nula consiste en que el proceso sigue un camino aleatorio, mientras que la hipótesis alterna corresponde a un proceso ARMA estacionario.

Así mismo, se considera la prueba no-paramétrica de raíces unitarias de Breitung (2002) que sigue la misma lógica de las anteriores pruebas.

Finalmente, se recurre también a la prueba de KPSS (Kwiatkowski y otros (1992)) que implica alternar las hipótesis nula y alterna de las pruebas ADF y PP. Los resultados de estas pruebas se presentan en la Tabla 2, los cuales corroboran la existencia de una raíz unitaria en las series.

Tabla 2. Pruebas de raíces unitarias para las series de TRM e IGBC en niveles y logaritmos

	ADF/1	PP	Breitung (2002)/2	KPss
TRM _t	-0.217	-0.340	0.016	0.730 ++
LN (TRM _t)	-0.191	-0.290	0.016	0.750 ++
IGBC _t	2.740	8.780	0.010	0.869 ++
LN (IGBC _t)	-2.429	-7.850	0.009	0.840 ++

ADF, PP y Breitung (2002) Corresponden a los respectivos estadísticos de la prueba de estacionariedad de Dickey - Fuller, Phillips, Perron y Breitung (2002).

KPSS: Corresponde al estadístico de la prueba de raíces unitarias de Kwiatkowski, Phillips, Semidt y Shin (1992).

(¹): Rechaza la hipótesis nula de un proceso con raíz unitaria a un nivel de significancia del 10%

(⁵): Rechaza la hipótesis nula de un proceso con raíz unitaria a un nivel de significancia del 5%

(¹): Rechaza la hipótesis nula de un proceso con raíz unitaria a un nivel de significancia del 1%

(+): Rechaza la hipótesis nula de un proceso estacionario alrededor de una tendencia a un nivel de significancia del 10%

(++): Rechaza la hipótesis nula de un proceso estacionario alrededor de una tendencia a un nivel de significancia del 5%

/1: El número óptimo de rezagos se determina de acuerdo con el criterio de información Akaike (AIC).

/2: La decisión es basada en valores críticos simulados a partir de 1.000 repeticiones para un proceso gaussiano.

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 2. Más evidencia sobre el hecho 3.

Tabla 3. Resumen estadístico de los rendimientos de la TRM.

	Semanales	Mensuales	Trimestrales
Media	0.000436472	0.003618795	0.0133286
Varianza	8.97179E-05	0.000948644	0.00409112
Coefficiente de Asimetría	0.1050629	0.368751	0.7252467
Curtosis	1.784831	0.4867702	0.4787708
Jarque-Bera	185.3957***	44.0156***	125.1721***

*** Se puede rechazar la hipótesis nula de Normalidad con un 99% de confianza.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4. Resumen estadístico de los rendimientos de la IGBC.

	Semanales	Mensuales	Trimestrales
Media	0.001981157	0.2844121	0.08200917
Varianza	0.001035533	0.01175361	0.04512509
Coefficiente de Asimetría	0.5735873	0.786204	1.333427
Curtosis	3.247.405	2.519.107	4.671
Jarque-Bera	1.676.536***	1238.303***	4000.461***

***Se puede rechazar la hipótesis nula de normalidad con un 99% de confianza.

Fuente: Elaboración propia.

Figura 9. Rendimientos del IGBC para diferentes escalas de tiempo.

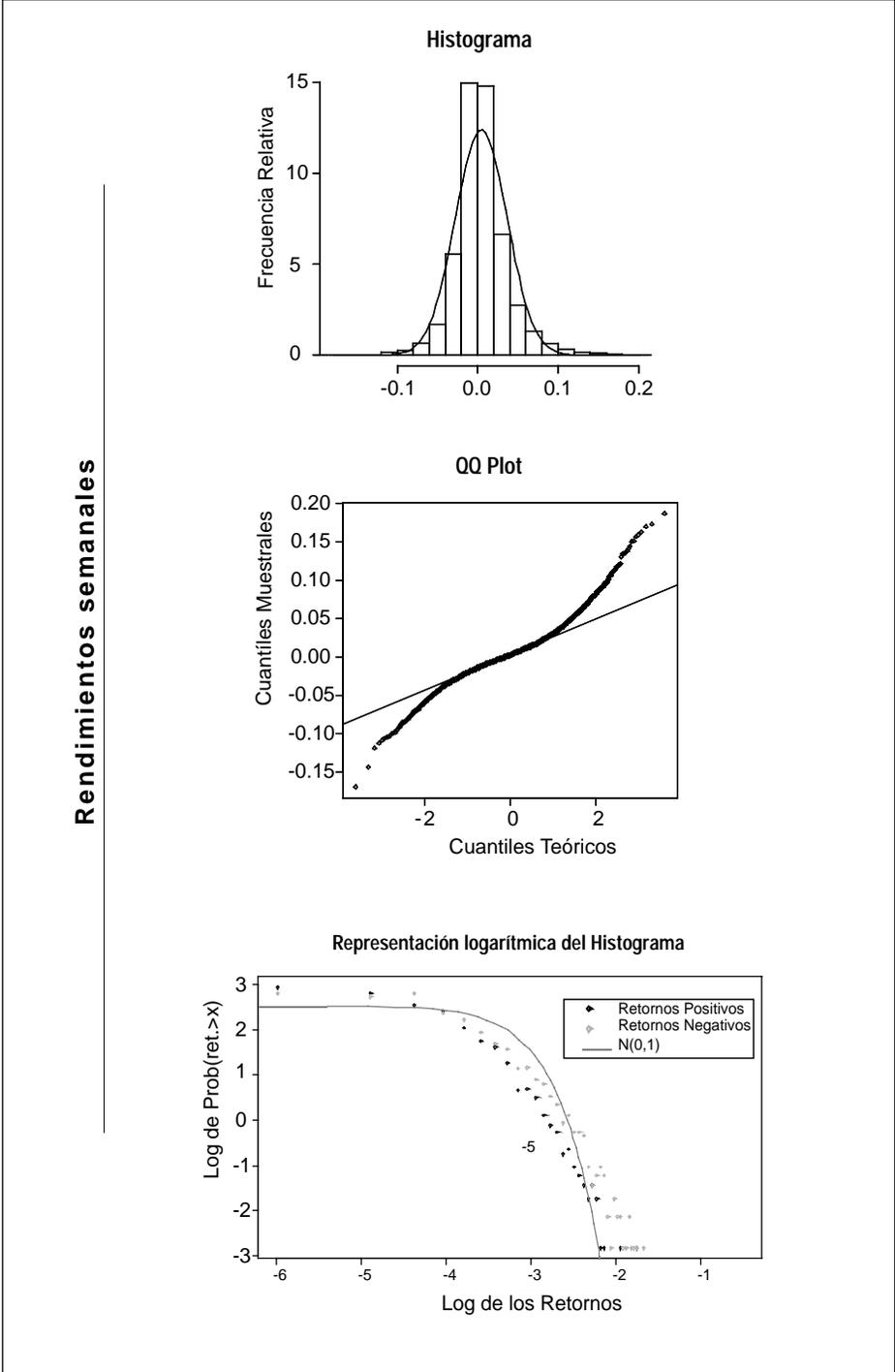


Figura 9. Continuación

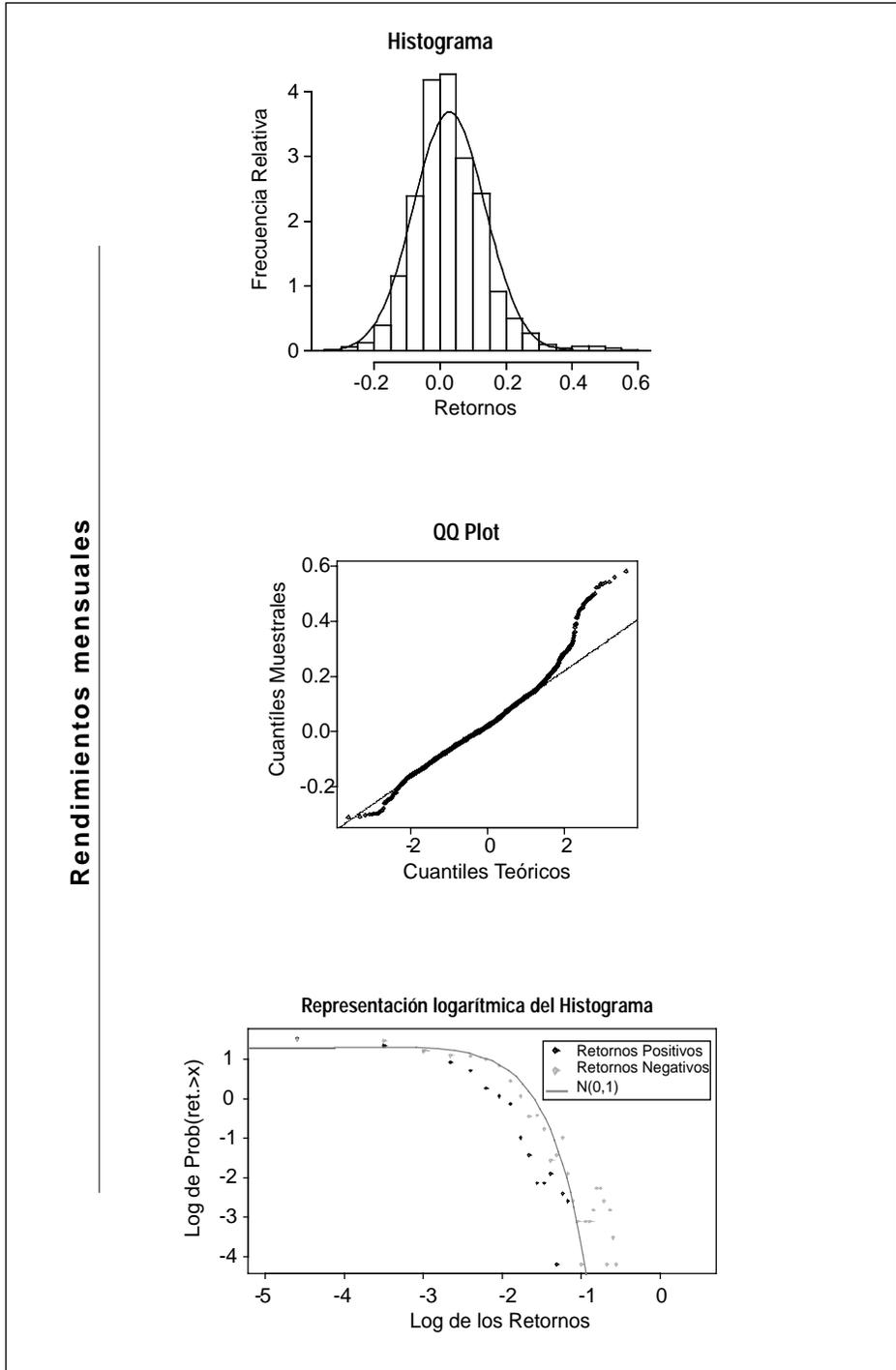
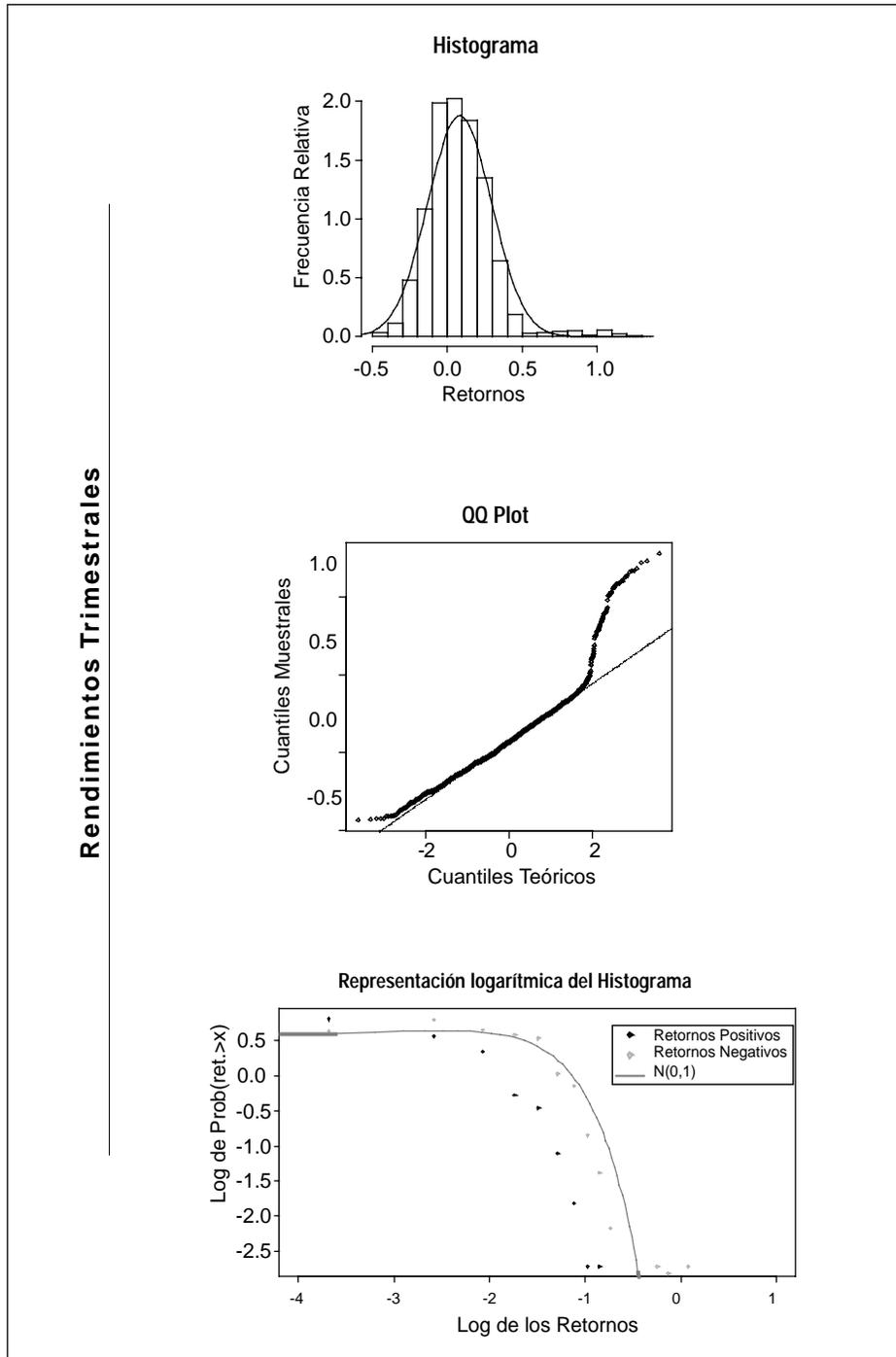


Figura 9. Continuación



Fuente: Elaboración propia.

BIBLIOGRAFÍA

- Alonso C., Julio César y Mauricio Alejandro Arcos. 2005. "Valor en riesgo: evaluación del desempeño de diferentes metodologías para siete países latinoamericanos". *Mimeo*.
- Breitung, Jorg. 2002. "Nonparametric Tests for Unit Roots and Cointegration". *Journal of Econometrics*, 108:2, pp. 343-63.
- Cont, Rama. 2001. "Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues". *Quantitative Finance*, 1:2, pp. 223-36.
- Dickey, David A. and Wayne A. Fuller. 1979. "Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root". *Journal of the American Statistical Association*, 74:366, pp. 427-31.
- Guermat, Cherif and Richard Harris. 2002. "Forecasting value at risk allowing for time variation in the variance and kurtosis of portfolio returns". *International Journal of Forecasting*, 18, pp. 409-19.
- Kwiatkowski, Denis, Peter C. B. Phillips, Peter Schmidt, and Yongcheol Shin. 1992. "Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root?" *Journal of Econometrics*, 54:1-3, pp. 159-78.
- Phillips, Peter C. B. and Pierre Perron. 1988. "Testing for a unit root in time series regression". *Biometrika*, 75:2, pp. 335-46.
- Vries, C. G. de. 1994. "Stylized Facts of Nominal Exchange Rate Returns", in *The Handbook of International Macroeconomics*. F. van der Ploeg ed. Oxford: Blackwell, pp. 348 - 89 

